PRÁCTICA Nº 10

Espacios vectoriales: Bases y Subespacios

1. BASES Y COORDENADAS Y MATRICES DE CAMBIO DE BASE

1.1 SISTEMAS DE GENERADOS E INDEPENDENCIA LINEAL: BASES

Sabemos que una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independiente y que además es un sistema de generadores de dicho espacio. Cogiendo como V el espacio vectorial real tridimensional, es decir, $\mathbb{R}^3$ cuyos elementos son ternas (x, y, z) con cada una de sus componentes en R. Consideremos la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Las bases las introducimos en Mathematica como matrices, es decir, como lista de listas siendo cada una de sus componentes uno de los vectores de la base:

In[]:= **B1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**

Para probar si dichos vectores forman base de $\mathbb{R}^3$ y como conocemos la dimensión del espacio que es 3, nos bastará con ver que son linealmente independientes, pues como sabemos tres vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión 3 forman base. Para ver que son linealmente independientes basta con calcular su determinante, si es distinto de cero forman base y si es cero son linealmente dependientes y no forman base.

In[]:= **Det[B1]**

Out[]= `-1`

Por tanto, B_1 es base de $\mathbb{R}^3$.

También podemos analizar con Mathematica si un subconjunto de vectores es sistema de generadores o son linealmente independientes:

- Para que sea sistema de generadores el rango de la matriz cuyas filas (o columnas) sean las coordenadas de los vectores debe coincidir con la dimensión del espacio vectorial.

- Para que sean linealmente independientes, el rango de la matriz cuyas filas (o columnas) sean las coordenadas de los vectores debe coincidir con el número de vectores del conjunto.

Con Mathematica, usando **MatrixRank[]** (o cualquiera de los métodos que hemos visto para calcular el rango) podemos determinar si un subconjunto de vectores es sistema de generadores o si son linealmente independientes.

Por ejemplo,

In[]:= **S = {{1, 1, 0}, {-1, 1, 0}, {0, 2, 10}, {0, 1, -1}};**
MatrixRank[S1] == 3

Out[]= `True`

es sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, y los vectores del conjunto,

In[]:= **S1 = {{1, 1, 0, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1, 1, 1},**
{1, 0, 0, -2, 0, 0}, {1, -1, -1, 0, 1, -1}};
MatrixRank[S1] == 4

Out[]= `True`

son linealmente independientes en $\mathbb{R}^6$.

1.2 COORDENADAS.

Las coordenadas de un vector respecto de una base se pueden calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. Consideremos el vector v de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (4, 1, -2) respecto de la base canónica, veamos cuales son sus coordenadas respecto de la base B_1. Las coordenadas buscadas serán los números (x, y, z) tales que:

$$(4, 1, -2) = x\cdot(1, 0, 0) + y\cdot(-1, 1, 0) + z\cdot(0, 1, -1)$$

es decir, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base y cuyo vector de términos independientes es el vector v. En Mathematica:

In[]:= **v = {4, 1, -2};**
v1 = LinearSolve[Transpose[B1], v]

Out[]= `{3,-1,2}`

1.3 CAMBIO DE BASE.

Supongamos ahora que tenemos dos bases B_1 y B_2 de un espacio vectorial, nos proponemos encontrar la matriz del cambio de base B_1 a B_2, que nos permite calcular las coordenadas de cualquier vector respecto de B_2, conocidas las coordenadas de dicho vector respecto de B_1. Como sabemos la matriz del cambio de base es la matriz regular que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la primera base, B_1 respecto a la segunda base, B_2.

Como ejemplo consideremos la base B_1 del apartado anterior y una nueva base

$$B_2 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$$

Ambas bases de $\mathbb{R}^3$. Nos proponemos calcular las coordenadas del vector v del apartado anterior respecto de la nueva base y para ello usaremos el cambio de base. En primer lugar, introducimos la nueva base en el Mathematica y comprobamos que realmente es base:

In[]:= **B2={{1,0,-1},{2,1,0},{-1,1,1}};**
Det[B2]

Out[]= `-2`

Teniendo en cuenta anterior la matriz del cambio de base de B_1 a B_2 se puede construir como sigue:

In[]:= **P = Transpose[Table[LinearSolve[**
Transpose[B2],B1[[i]]],{i,1,3,1}]];
MatrixForm[P]

Out[]= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Una vez construida la matriz del cambio de base, es inmediato obtener las coordenadas del vector dado, basta con multiplicar dicha matriz por el vector:

In[]:= **v2= P.v1**

Out[]= `{2,1,0}`

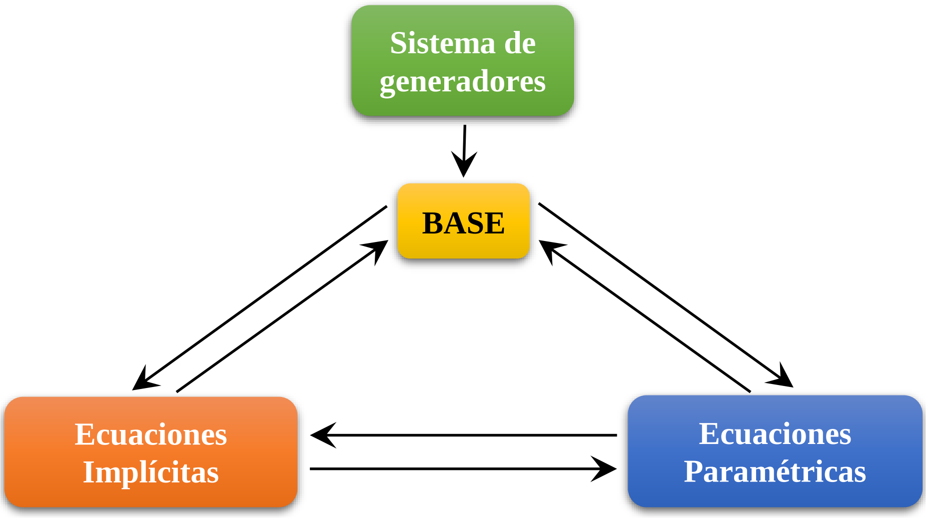
Podemos comprobar que el cambio de base se ha realizado satisfactoriamente transformando ambos vectores a sus coordenadas respecto de la base canónica de R^3 para lo cual solo hay que sumar los productos de cada una de las componentes del vector v1 por el respectivo elemento de la base:

In[]:= **Sum[v1[[i]]*B1[[i]],{i,1,3}] == Sum[v2[[i]]*B2[[i]],{i,1,3}]**

Out[]= `True`

2. SUBESPACIOS VECTORIALES

Los subespacios vectoriales pueden dárnoslos a partir de un sistema de generadores, una base, las ecuaciones parámetricas o las ecuaciones implícitas. En este epígrafe aprenderemos a movernos entre las distintas formas de representar un subespacio vectorial con Mathematica.



2.1 BASE Y DIMENSIÓN DESDE UN SISTEMA DE GENERADORES

Dado un sistema de generadores, con Mathematica, utilizando **MatrixRank[]** podemos calcular la dimensión, y usando **RowReduce[]** encontrar una base.

Por ejemplo, si consideramos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$S = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$$

Entonces:

In[]:=

```
S = {{1, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, -1, 0}};
dimensión=MatrixRank[S]
```

Out[]=

```
2
```

Y su base,

In[]:=

```
Base[Generadores_] := Table[RowReduce[Generadores][[i]]
                         , {i, MatrixRank[Generadores]}];
base=Base[S]
```

Out[]= `{{1, 0, 1}, {0, 1, 0}}`

2.2 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DESDE UNA BASE

Dado un espacio vectorial V de dimensión n, y un subespacio W de dimensión m, calcularemos las ecuaciones paramétricas, desde una base cualquiera $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ del subespacio vectorial, cogiendo una combinación lineal cualquiera de los vectores de la base, con Mathematica:

```
Paramétricas[Base_] := Module[{Parte1, paramétricas},
  Clear[λ];
  Parte1 = Sum[λ[i]*Base[[i]], {i, Length[Base]}];
  paramétricas = {};
  Do[AppendTo[paramétricas,Subscript[x,i]==Parte1[[i]]];,{i, Length[Base[[1]]]}];
  paramétricas
];
```

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio generado por

$$S = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\},$$

sus ecuaciones paramétricas:

In[]:=
```
generadores={{1,1,1},{1,0,1},{0,-1,0}};
paramétricas=Paramétricas[Base[generadores]]
```

Out[]= $\{x_1 == \lambda[1],\ x_2 == \lambda[2],\ x_3 == \lambda[1]\}$

* (Para evitar problemas con el intérprete de Mathematica renombramos los parámetros λ_i como λ[i]).

2.3 ECUACIONES IMPLÍCITAS DESDE UNA BASE

Las ecuaciones implícitas las calculamos desde las ecuaciones paramétricas eliminando parámetros con la función de Mathematica: **Eliminate[]**. Desde una base, sería igual, pero primero calculamos las ecuaciones paramétricas:

```
Implícitas[Base_] := Eliminate[Paramétricas[Base], Table[λ[i], {i, Length[Base]}]];
```

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio generado por

$$S = \{(1, 1, 1) , (1, 0, 1), (0, -1, 0)\},$$

sus ecuaciones implícitas:

In[]:=
```
generadores={{1,1,1},{1,0,1},{0,-1,0}};
paramétricas=Implícitas[Base[generadores]]
```

Out[]= `x3 == x1`

2.4 ECUACIONES IMPLÍCITAS DESDE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Si tenemos las ecuaciones paramétricas, las ecuaciones implícitas las calcularemos directamente eliminando los parámetros con la función de Mathematica, **Eliminate[]:**

Eliminate[ecuaciones paramétricas, lista de parámetros]

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio con ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = \lambda_1$$
$$x_2 = \lambda_2$$
$$x_3 = \lambda_1$$

sus ecuaciones implícitas se calcularían:

In[]:= **paramétricas = {Subscript[x, 1] == λ[1], Subscript[x, 2]==λ[2], Subscript[x, 3]==λ[1]}; Eliminate[paramétricas, {λ[1], λ[2]}]**

Out[]= `x3 == x1`

2.5 BASE DESDE LAS ECUACIONES IMPLÍCITAS

Para calcular una base del subespacio vectorial desde las ecuaciones implícitas, observemos que las ecuaciones implícitas son un sistema de ecuaciones lineales cuya solución son los vectores del subespacio vectorial. Calcularemos la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y usaremos la función de Mathematica **NullSpace[]** aplicándola a la matriz de coeficientes, que nos devolverá directamente la base del subespacio.

BaseImplícitas[SISTimplícitas_, dimensión_] :=NullSpace[Join[Normal[CoefficientArrays[SISTimplícitas,Table[Subscript[x, i], {i, dimensión}]]][[2]], Table[Table[0, {j, dimensión}], {i, dimensión - Length[SISTimplícitas]}]]];

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio con ecuaciones implícitas:

$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_3 = 0$$

su base sería:

In[]:= **BaseImplícitas[{Subscript[x, 1] - Subscript[x, 2] == 0, 3 Subscript[x, 1] + 5 Subscript[x, 3] == 0}, 3]**

Out[]= `{{-5,-5,3}}`

2.6 BASE DESDE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Podemos hacerlo de varias formas:

- Podemos calcularla pasando por las ecuaciones implícitas, esto es, eliminando parámetros con **Eliminate[]** y aplicando **NullSpace[]** a la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales (las ecuaciones implícitas).
- Directamente podríamos calcularla dando valores a los parámetros, (igual que hemos aprendido en teoría) asignamos a uno de los parámetros el valor uno y al resto asignamos el cero, y también podemos automatizarlo usando **IdentityMatrix[]**.

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio con ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \\ x_2 &= \lambda_2 \\ x_3 &= \lambda_1 \end{aligned}$$

<u>MÉTODO 1</u>

1. Eliminamos parámetros y obtenemos las ecuaciones implícitas:

In[]:= **paramétricas = {Subscript[x, 1] == λ[1],**
Subscript[x, 2]==λ[2], Subscript[x, 3]==λ[1]};
ímplicitas=Eliminate[paramétricas, {λ[1], λ[2]}]

Out[]= $x_3 == x_1$

2. Calculamos la base desde las ecuaciones implícitas:

In[]:= **dimensión = 2;** *(*Dimensión del subespacio *)*
n = 3; *(*Dimensión del espacio vectorial *)*
SISTimplícitas = If[dimensión == (n - 1), {implícitas},
Table[implícitas[[i]], {i, n - dimensión}]]; *(*S. ecuaciones lineales*)*

Y ahora usamos la función **BaseImplícitas[]** que definimos en el epígrafe anterior:

In[]:= **BaseImplícitas[SISTimplícitas, 3]**

Out []= `{{1, 0, 1}, {0, 1, 0}}`

<u>MÉTODO 2</u>

Hacemos el ejemplo 1, pero directamente calculamos la base dando valores a los parámetros, asignamos a uno de ellos el 1 y el resto lo hacemos 0:

In[]:= **paramétricas = {x_1 == λ[1], x_2 == λ[2], x_3 == λ[1]};**

In[]:= **λ[1] = 1; λ[2] = 0;**
Table[paramétricas[[i]][[2]], {i, Length[paramétricas]}]

Out[]= `{1, 0, 1}`

In[]:= **λ[1] = 0; λ[2] = 1;**
Table[paramétricas[[i]][[2]], {i, Length[paramétricas]}]

Out[]= `{0, 1, 0}`

Y podemos automatizarlo usando **IdentityMatrix[]**:

In[]:=

```
paramétricas = {x1 == λ[1], x2 == λ[2], x3 == λ[1]};
dimensión = 2; (*Dimensión del subespacio, número de parámetros*)
base = {};
Do[Do[
  λ[i] = IdentityMatrix[dimensión][[j]][[i]], {i,    dimensión}];
  AppendTo[base, Table[paramétricas[[i]][[2]]
,{i, Length[paramétricas]}]], {j, dimensión}];
base
```

Out[]= `{{0, 1, 0}, {1, 0, 1}}`

2.7 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DESDE LAS ECUACIONES IMPLÍCITAS

Si partimos de las ecuaciones implícitas y queremos calcular las ecuaciones parámetricas, éstas se corresponden con la solución al sistema de ecuaciones lineales homogéneo, que son las ecuaciones implícitas. Si dicho sistema es compatible determinado, entonces el subespacio es el 0, y si el sistema es compatible indeterminado, su solución general (usando parámetros) son las ecuaciones paramétricas.

Para calcular la solución del sistema de ecuaciones lineales con Mathematica, recordemos que uno de los métodos que vimos consistía en coger una solución particular con **LinearSolve[]**, a la que le sumaríamos una combinación lineal de los vectores que nos devuelve **NullSpace[]**, pero en realidad no hay que usar LinearSolve[], porque el sistema es homogéneo y conocemos una solución particular: el vector 0, por tanto, bastará con calcular la combinación lineal de los vectores que nos da NullSpace[].

Observemos que en realidad lo que hemos razonado nos lleva a calcular la base del subespacio y después coger una combinación lineal de ésta, esto es, pasar de las ímplicitas a la base (5) y de la base a las paramétricas (2).

Por ejemplo, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el subespacio con ecuaciones implícitas:

$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_3 = 0$$

usamos las funciones **Paramétricas[]** y **BaseImplícitas[]** de los epígrafes anteriores:

In[]:= **Paramétricas[BaseImplícitas[{x₁ – x₂ == 0, 3 x₁ + 5 x₃ == 0}, 3]]**

Out[]=
```
{x1 = -5 λ[1], x2 = -5 λ[1], x3 = 3 λ[1]}
```